Über die koassoziativen Gesetze

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
an der Hohen Philosophischen und
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-
Universität zu Münster

vorgelegt von

Josef Haupt

Studienreferendar
aus Dortmund

1934

Druck: Heinrich Pöppinghaus, o. H.-G., Bochum-Langendreer.

Tag der mündlichen Prüfung: 1. Juni 1933.

Dekan: Herr Professor Dr. A. Eitel.

Referent: Herr Professor Dr. L. Neder.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung.

Ausgehend von einem bestimmten System von Gesetzen der allgemeinen Arithmetik — hier mit S_0 bezeichnet —, das u. a. das kommutative und assoziative Gesetz enthält, macht die vorliegende Arbeit solche Gesetzessysteme zum Gegenstand näherer Untersuchung, die aus dem System S_0 durch Zusammenfassung des kommutativen und assoziativen Gesetzes zu „einem" Gesetz hervorgehen. Die 15 verschiedenen Möglichkeiten der Zusammenfassung schaffen 15 neue Gesetze — hier „koassoziative Gesetze" genannt — und somit 15 neue Gesetzessysteme. Für 11 dieser Systeme ergibt sich die Äquivalenz (Kap. II), für die restlichen 4 die Nichtäquivalenz (Kap. III) mit S_0.

Die zahlreichen notwendigen Unabhängigkeitsbeweise für die Gesetze der einzelnen Systeme verlangen die Behandlung mehrerer spezieller Größensysteme, in denen als Folge einer zweckmäßig definierten „Gleichheit" und Verknüpfung dasjenige Gesetz nicht erfüllt ist, dessen Unabhängigkeit von bestimmten anderen, in diesem speziellen Größensystem erfüllten Gesetzen bewiesen werden soll. Die Resultate dieser in Kap. I, § 2 durchgeführten Untersuchung sind einer übersichtlichen und bequemen Gestaltung der in Kap. II und III angeführten Unabhängigkeitsbeweise zuliebe im Kap. I am Schluß des § 2 zusammengestellt.

In Kap. II, § 1 sind die zum Teil schon bekannten Folgerungen aus dem System S_0 aus Gründen der Vollständigkeit aufgeführt.

KAPITEL I.

§ 1.

Aufzählung und Erläuterung der Gesetze*).

Vorbemerkung: Die Dinge oder Größen eines Größensystems werden als „Elemente“ bezeichnet.

(0) Zwischen den Elementen des Größensystems soll eine Beziehheit — die durch das Zeichen $\doteqdot$ dargestellte Gleichheit — so definiert sein, daß von je zwei beliebigen Elementen des Größensystems entschieden werden kann, ob sie gleich ($\doteqdot$) sind oder nicht. Dazu die Gesetze:
(G_r): $a \doteqdot a$; (G_s): $a \doteqdot b \rightarrow b \doteqdot a$; (G_t): $a \doteqdot b$ u. $b \doteqdot c \rightarrow a \doteqdot c$;

(1) Je zwei Elementen des Größensystems soll eindeutig ein drittes Element des Größensystems durch eine bestimmte Verknüpfungsvorschrift zugeordnet sein. Die Verknüpfung werde durch das Symbol $*$, die Zuordnung durch das Symbol $=_D$ gekennzeichnet. In Zeichen: $a * b =_D c$;

(2) $a * b \doteqdot b * a$;

(3) $(a * b) * c \doteqdot a * (b * c)$;

(3_1) $(a * b) * c \doteqdot (a * c) * b$;
(3_2) $(a * b) * c \doteqdot (b * a) * c$;
(3_3) $(a * b) * c \doteqdot (b * c) * a$;
(3_4) $(a * b) * c \doteqdot (c * a) * b$;
(3_5) $(a * b) * c \doteqdot (c * b) * a$;
(3_6) $(a * b) * c \doteqdot a * (c * b)$;
(3_7) $(a * b) * c \doteqdot b * (a * c)$;
(3_8) $(a * b) * c \doteqdot b * (c * a)$;
(3_9) $(a * b) * c \doteqdot c * (a * b)$;
(3_{10}) $(a * b) * c \doteqdot c * (b * a)$;
(3_{11}) $a * (b * c) \doteqdot a * (c * b)$;
(3_{12}) $a * (b * c) \doteqdot b * (a * c)$;
(3_{13}) $a * (b * c) \doteqdot b * (c * a)$;
(3_{14}) $a * (b * c) \doteqdot c * (a * b)$;
(3_{15}) $a * (b * c) \doteqdot c * (b * a)$;

(4_1) $a \doteqdot a' \rightarrow a * b \doteqdot a' * b$;
(4_2) $b \doteqdot b' \rightarrow a * b \doteqdot a * b'$;

---

*) Die Gesetze sind ohne Begleittext noch einmal auf dem herausklappbaren Beiblatt zusammengestellt, ebenso die verwendeten Bezeichnungen mit Erklärung.

(5) Es existiert ein Element m des Größensystems der Art, daß $m * a \doteqdot a$ für jedes a; m heißt „vorderer Modul".

(5') Es existiert ein Element m' des Größensystems der Art, daß $a * m' \doteqdot a$ für jedes a; m' heißt „hinterer Modul".

(6) Wenn a ein Element und m bzw. m' ein Modul ist, so existiert ein Element a_m bzw. $a_{m'}$, a'_m, $a'_{m'}$ des Größensystems der Art, daß

(6_1) $a_m * a \doteqdot m$; a_m heißt „vordere Inverse vorderen Moduls".
(6_1') $a_{m'} * a \doteqdot m'$; $a_{m'}$ heißt „vordere Inverse hinteren Moduls".
(6_2) $a * a'_m \doteqdot m$; a'_m heißt „hintere Inverse vorderen Moduls".
(6_2') $a * a'_{m'} \doteqdot m'$; $a'_{m'}$ heißt „hintere Inverse hinteren Moduls".

Allgemeine Erläuterung zu den Gesetzen (2) bis (6_2'):

Das den linksseitigen Elementen durch die Verknüpfungsvorschrift zugeordnete Element soll gleich ($\doteqdot$) dem Element sein, das die Verknüpfungsvorschrift den rechtsseitigen Elementen zuordnet.

Zur Berechtigung der gewählten Schreibweise siehe Satz I, § 2.

§ 2.

Beispiele spezieller Größensysteme.

Um eine Wiederholung der Unabhängigkeitsbeweise der Gesetze in Kap. II und III zu vermeiden, sollen in diesem Paragraphen einige spezielle Größensysteme vorbehandelt werden.

Vorbetrachtungen: 1) Nach den Regeln über das Rechnen mit definitionsgleichen Ausdrücken ergeben sich folgende Sätze:

Satz I: $a * b =_D c$ und $c \doteqdot c' \rightarrow a * b \doteqdot c'$;

Satz II: $a * b =_D c$ und $a * b \doteqdot c' \rightarrow c \doteqdot c'$;

Die Anwendung dieser Sätze, die in allen betrachteten Größen- und Gesetzessystemen erfüllt sind — die Voraussetzungen sind überall erfüllt bzw. in Beispiel 3, § 2, Kap. I nicht erklärt —, erfolgt ohne besonderen Hinweis auf sie.

2) Ein Beispiel eines Größensystems, in dem das Gesetz (G_r) nicht erfüllt ist, wird aus später ersichtlichen Gründen nicht gegeben.

Beispiel 1: Elemente: Die reellen Zahlen;
Gleichheit: $a \doteqdot b \rightleftarrows a \leqq b$;
Verknüpfung: $a * b =_D a + b$;

(G_r) ist erfüllt; denn $a \leqq a \to a \doteqdot a$;

(G_s) ist nicht erfüllt; denn $1 \leqq 2 \to 1 \doteqdot 2$; $2 > 1 \to \overline{2 \doteqdot 1}$;

(G_t) ist erfüllt; denn $a \doteqdot b$ u. $b \doteqdot c \to a \leqq b$ u. $b \leqq c \to a \leqq c \to a \doteqdot c$;

(1) ist erfüllt;

(2), (3) und alle (3_i) sind erfüllt ($i = 1, 2, \ldots, 15$), weil die beiderseitigen Verknüpfungsresultate gleich sind im gewöhnlichen Sinne und daher auch nach der obigen Definition.

(4_1) ist erfüllt;

denn $a \doteqdot a' \to a \leqq a' \to a + b \leqq a' + b \to a * b \doteqdot a' * b$;

(4_2) ist erfüllt;

denn $b \doteqdot b' \to b \leqq b' \to a + b \leqq a + b' \to a * b \doteqdot a * b'$;

(5) ist erfüllt; 0 ist ein vorderer Modul; denn

$$0 + a \leqq a \to 0 * a \doteqdot a;$$

(5') ist erfüllt; 0 ist ein hinterer Modul; denn

$$a + 0 \leqq a \to a * 0 \doteqdot a;$$

(6_1), (6_1'), (6_2) u. (6_2') sind erfüllt; denn die Gleichungen

$$x * a \doteqdot b \text{ oder } x + a \leqq b$$

bzw. $a * x \doteqdot b$ oder $a + x \leqq b$

haben bei jedem beliebigen Elementenpaar a, b mindestens eine Lösung.

Beispiel 2: Elemente: Die reellen Zahlen;

Gleichheit: $a \doteqdot b \rightleftarrows |a - b| \leqq 1$;

Verknüpfung: $a * b =_D a + b$;

(G_r) ist erfüllt; denn $|a - a| \leqq 1 \to a \doteqdot a$;

(G_s) ist erfüllt; denn

$$a \doteqdot b \to |a - b| \leqq 1 \to |b - a| \leqq 1 \to b \doteqdot a;$$

(G_t) ist nicht erfüllt; denn

$$|1 - 2| \leqq 1 \text{ u. } |2 - 3| \leqq 1 \to 1 \doteqdot 2 \text{ u. } 2 \doteqdot 3;$$

aber $|1 - 3| > 1 \to \overline{1 \doteqdot 3}$

(1) ist erfüllt;

(2), (3) und alle (3_i) sind erfüllt ($i = 1, 2, \ldots, 15$); Beweis wie zu (2), (3) u. (3_i) in Bsp. 1;

(4_1) ist erfüllt; denn

$$a \doteqdot a' \to |a - a'| \leqq 1 \to |(a + b) - (a' + b)| \leqq 1 \to a * b \doteqdot a' * b;$$

(4_2) ist erfüllt; denn

$$b \doteq b' \rightarrow |b—b'| \leqq 1 \rightarrow |(a + b) — (a + b')| \leqq 1 \rightarrow a * b \doteq a * b';$$

(5) ist erfüllt; 0 ist ein vorderer Modul, denn

$$|(0 + a) — a| \leqq 1 \rightarrow 0 * a \doteq a;$$

(5') ist erfüllt; 0 ist ein hinterer Modul; denn

$$|(a + 0) — a| \leqq 1 \rightarrow a * 0 \doteq a;$$

(6_1), (6_1'), (6_2) u. (6_2') sind erfüllt, denn die Gleichungen

$x * a \doteq b$ oder $|(x + a) — b| \leqq 1$,

bzw. $a * x \doteq b$ oder $|(a + x) — b| \leqq 1$

haben bei jedem beliebigen Elementenpaar a, b mindestens eine Lösung.

Beispiel 3: Elemente: Die reellen Zahlen;
Gleichheit: Wie üblich;
Verknüpfung: Wird nicht erklärt;

(1) ist nicht erfüllt;

(G_r), (G_s) u. (G_t) sind erfüllt, weil die definierte Gleichheit die übliche ist. Alle übrigen Gesetze sind erfüllt, weil man ihnen die Voraussetzung hinzufügen kann: „Wenn die Verknüpfung zweier Elemente ausnahmslos erklärt ist."

Beispiel 4: Elemente: A, B, C, . . ., wo
$A \equiv A(x)$ für $0 \leqq x \leqq \infty$ stetig und monoton wachsend von 0 bis ∞.
$B \equiv B(x)$ desgl.

Gleichheit: $A \doteq B \rightleftarrows A(x) = B(x)$ für $0 \leqq x \leqq \infty$;

Verknüpfung: $A * B =_D B(A(x))$ für $0 \leqq x \leqq \infty$;

(G_r), (G_s) u. (G_t) sind erfüllt; Beweis klar.

(1) ist erfüllt:

α) Da A (x) monoton wachsend ist von 0 bis ∞, ist B(A(x)) erklärt für $0 \leqq x \leqq \infty$;

β) B(A(x)) ist stetig; Beweis klar;

γ) $B(A(0)) = B(0) = 0$;
$B(A(\infty)) = B(\infty) = \infty$;

δ) Nach Vor. ist:
$0 \leqq x_1 < x_2 \leqq \infty \rightarrow 0 \leqq A(x_1) < A(x_2) \leqq \infty$;
$0 \leqq y_1 < y_2 \leqq \infty \rightarrow 0 \leqq B(y_1) < B(y_2) \leqq \infty$;

Wir ersetzen y_1 durch $A(x_1)$ und y_2 durch $A(x_2)$; dann gilt:

$$0 \leqq x_1 < x_2 \leqq \infty \rightarrow 0 \leqq B(A(x_1)) < B(A(x_2)) \leqq \infty;$$

Insgesamt: $B(A(x))$ ist erklärt für $0 \leqq x \leqq \infty$, stetig und monoton wachsend von 0 bis ∞.

(2) ist nicht erfüllt; denn

$$2x * x^2 =_D 4x^2;\ x^2 * 2x =_D 2x^2;\ *)$$

(3) ist erfüllt; denn ersetzen wir $B(A(x))$ durch $P(x)$ und $C(B(x))$ durch $Q(x)$, so folgt:

$$\left.\begin{array}{l}(A(x)*B(x))*C(x) = C(P(x)) = C(B(A(x)))\\ A(x)*(B(x)*C(x)) = Q(A(x)) = C(B(A(x)))\end{array}\right\} \rightarrow (A*B)*C \doteqdot A*(B*C);$$

(3_1) ist nicht erfüllt; denn $(2x * x^2) * 3x^3 =_D 192x^6$; $(2x * 3x^3) * x^2 =_D 576x^6$; *)

(3_6) u. (3_{11}) sind nicht erfüllt; Beweis folgt durch Anwendung von (3) auf (3_6) bzw. (3_{11});

(3_2) ist nicht erfüllt; denn $(2x * x^2) * 3x^3 =_D 192x^6$; $(x^2 * 2x) * 3x^3 =_D 24x^6$; *)

(3_7) u. (3_{12}) sind nicht erfüllt; Beweis folgt durch Anwendung von (3) auf (3_7) bzw. (3_{12});

(3_3) ist nicht erfüllt; denn $(2x * x^2) * 3x^3 =_D 192x^6$; $(x^2 * 3x^3) * 2x =_D 6x^6$; *)

(3_8) u. (3_{13}) sind nicht erfüllt; Beweis folgt durch Anwendung von (3) auf (3_8) bzw. (3_{13});

(3_4) ist nicht erfüllt; denn $(2x * x^2) * 3x^3 =_D 192x^6$; $(3x^3 * 2x) * x^2 =_D 36x^6$; *)

(3_9) u. (3_{14}) sind nicht erfüllt; Beweis folgt durch Anwendung von (3) auf (3_9) bzw. (3_{14});

(3_5) ist nicht erfüllt; denn $(2x * x^2) * 3x^3 =_D 192x^6$; $(3x^3 * x^2) * 2x =_D 18x^6$; *)

(3_{10}) u. (3_{15}) sind nicht erfüllt; Beweis folgt durch Anwendung von (3) auf (3_{10}) bzw. (3_{15});

(4_1) und (4_2) sind erfüllt, weil die definierte Gleichheit in der Identität der Elemente besteht.

(5) ist erfüllt; denn $M \equiv M(x) \equiv x$ ist ein vorderer Modul, da

$$x * A(x) =_D A(x) \rightarrow x * A(x) \doteqdot A(x).$$

(5') ist erfüllt; denn $M \equiv M(x) \equiv x$ ist ein hinterer Modul, da

$$A(x) * x =_D A(x) \rightarrow A(x) * x \doteqdot A(x).$$

*) Und die rechten Seiten sind ungleich.

(6_1), $(6_1')$, (6_2) u. $(6_2')$ sind erfüllt. Beweis:

Es sei $y \equiv A(x)$; dann ist

$x \equiv \bar{A}(y)$ ein Element des Systems.

Für A und $\bar{A}$ gilt:

$$\left.\begin{array}{l} y \equiv A(x) \equiv A(\bar{A}(y)) \\ x \equiv \bar{A}(y) \equiv \bar{A}(A(x)) \end{array}\right\} \rightarrow A(\bar{A}(x)) \equiv \bar{A}(A(x)) \equiv x;$$

Die Gleichungen: $X(x) * A(x) \doteq B(x)$

oder $A(X(x)) = B(x) \ldots (1)$

und $A(x) * X(x) \doteq B(x)$

oder $X(A(x)) = B(x) \ldots (2)$

haben bei jedem beliebigen Elementenpaar A, B eine Lösung; setzt man nämlich in Gl. (1) bzw. (2) für X(x) die Elemente $\bar{A}(B(x))$ bzw. $B(\bar{A}(x))$, so folgt:

$$A(X(x)) \equiv A(\bar{A}(B(x))) \equiv B(x); \quad X(A(x)) \equiv B(\bar{A}(A(x))) \equiv B(x);$$

Beispiel 5: Elemente: Die reellen Zahlen $\geqq 0$;

Gleichheit: Wie üblich;

Verknüpfung: $a * b =_D |a - b|$;

(G_r), (G_s), (G_t) u. (1) sind erfüllt;

(2) ist erfüllt; denn $|a - b| = |b - a| \rightarrow a * b \doteq b * a$;

(3_2) ist erfüllt; denn

$||a - b| - c| = ||b - a| - c| \rightarrow (a * b) * c \doteq (b * a) * c$;

(3_9) ist erfüllt; denn

$||a - b| - c| = |c - |a - b|| \rightarrow (a * b) * c \doteq c * (a * b)$;

(3_{10}) ist erfüllt; denn

$||a - b| - c| = |c - |b - a|| \rightarrow (a * b) * c \doteq c * (b * a)$;

(3_{11}) ist erfüllt; denn

$|a - |b - c|| = |a - |c - b|| \rightarrow a * (b * c) \doteq a * (c * b)$;

(3) ist nicht erfüllt; denn

$(1 * 3) * 6 =_D 4$; $1 * (3 * 6) =_D 2$; *)

(3_1) ist nicht erfüllt; denn

$(1 * 3) * 6 =_D 4$; $(1 * 6) * 3 =_D 2$; *)

(3_3) ist nicht erfüllt; denn

$(1 * 3) * 6 =_D 4$; $(3 * 6) * 1 =_D 2$; *)

(3_4) ist nicht erfüllt; denn

$(1 * 3) * 6 =_D 4$; $(6 * 1) * 3 =_D 2$; *)

---

*) Und die rechten Seiten sind ungleich.

(3_5) ist nicht erfüllt; denn
$(1 * 3) * 6 =_D 4$; $(6 * 3) * 1 =_D 2$; *)
(3_6) ist nicht erfüllt; denn
$(1 * 3) * 6 =_D 4$; $1 * (6 * 3) =_D 2$; *)
(3_7) ist nicht erfüllt; denn
$(1 * 3) * 6 =_D 4$; $3 * (1 * 6) =_D 2$; *)
(3_8) ist nicht erfüllt; denn
$(1 * 3) * 6 =_D 4$; $3 * (6 * 1) =_D 2$; *)
(3_{12}) ist nicht erfüllt, denn
$2 * (7 * 4) =_D 1$; $7 * (2 * 4) =_D 5$; *)
(3_{13}) ist nicht erfüllt; denn
$2 * (7 * 4) =_D 1$; $7 * (4 * 2) =_D 5$; *)
(3_{14}) ist nicht erfüllt; denn
$1 * (3 * 6) =_D 2$; $6 * (1 * 3) =_D 4$; *)
(3_{15}) ist nicht erfüllt; denn
$1 * (3 * 6) =_D 2$; $6 * (3 * 1) =_D 4$; *)
(4_1) ist erfüllt; denn
$a \doteqdot a' \to a = a' \to |a - b| = |a' - b| \to a * b \doteqdot a' * b$;
(4_2) ist erfüllt; denn
$b \doteqdot b' \to b = b' \to |a - b| = |a - b'| \to a * b \doteqdot a * b'$;
(5) ist erfüllt; denn 0 ist vorderer Modul, da
$|0 - a| = a \to 0 * a \doteqdot a$;
(5') ist erfüllt; denn 0 ist hinterer Modul, da
$|a - 0| = a \to a * 0 \doteqdot a$;
(6_1), (6_1'), (6_2), (6_2') sind erfüllt, denn die Gleichungen
$x * a \doteqdot b$ oder $|x - a| = b$
und $a * x \doteqdot b$ oder $|a - x| = b$
haben bei jedem beliebigen Elementenpaar a, b mindestens eine Lösung.

Beispiel 6: Elemente: Die reellen Zahlen;
Gleichheit: $a \doteqdot b \rightleftarrows [a] = [b]$,
wo $[a]$ die größte ganze Zahl $\leqq a$;
Verknüpfung: $a * b =_D a + b$;

(G_r) ist erfüllt; denn $[a] = [a] \to a \doteqdot a$;
(G_s) ist erfüllt; denn
$a \doteqdot b \to [a] = [b] \to [b] = [a] \to b \doteqdot a$;

---

*) Und die rechten Seiten sind ungleich.

(G_t) ist erfüllt; denn $a \doteq b$ u. $b \doteq c \to [a] = [b]$ u. $[b] = [c] \to [a] = [c] \to a \doteq c$;

(2), (3) und alle (3_i) sind erfüllt ($i = 1, 2, \ldots, 15$); Beweis wie in Bsp. 1 zu (2), (3) u. (3_i).

(4_1) ist nicht erfüllt; denn $7 = 7 \to [7{,}1] = [7{,}9] \to 7{,}1 \doteq 7{,}9$ aber $\left\{\begin{array}{l} 7{,}1 * 8{,}8 =_D 15{,}9 \\ 7{,}9 * 8{,}8 =_D 16{,}7 \end{array}\right\}$ *)

(4_2) ist nicht erfüllt; denn $7 = 7 \to [7{,}1] = [7{,}9] \to 7{,}1 \doteq 7{,}9$ aber $\left\{\begin{array}{l} 8{,}8 * 7{,}1 =_D 15{,}9 \\ 8{,}8 * 7{,}9 =_D 16{,}7 \end{array}\right\}$ *)

(5) ist erfüllt; denn 0 ist ein vorderer Modul, da $0 + a = a \to [0 + a] = [a] \to 0 * a \doteq a$;

(5') ist erfüllt; denn 0 ist ein hinterer Modul, da $a + 0 = a \to [a + 0] = [a] \to a * 0 \doteq a$;

(6_1), (6_1'), (6_2) u. (6_2') sind erfüllt; denn die Gleichungen

$$x * a \doteq b \text{ oder } [x + a] = [b]$$
$$\text{und } a * x \doteq b \text{ oder } [a + x] = [b]$$

haben bei jedem beliebigen Elementenpaar a, b mindestens eine Lösung.

Beispiel 7: Elemente: Die reellen Zahlen > 0;
Gleichheit: Wie üblich;
Verknüpfung: $a * b =_D a + b$;

Man sieht sofort, daß (G_r), (G_s), (G_t), (1), (2), (3) und alle (3_i), sowie (4_1) u. (4_2) erfüllt sind.

(5') ist nicht erfüllt; (5) ist nicht erfüllt; } denn die Gleichungen $x * a \doteq a$ oder $x + a = a$ und $a * x \doteq a$ oder $a + x = a$ haben keine Lösung.

(6_1), (6_1'), (6_2) u. (6_2') sind erfüllt wegen Nichterfülltheit der Voraussetzung.

Beispiel 8: Elemente: Die reellen Zahlen $\geqq 0$;
Gleichheit: Wie üblich;
Verknüpfung: $a * b =_D a + b$;

Man sieht sofort, daß (G_r), (G_s), (G_t), (1), (2), (3) und alle (3_i), sowie (4_1) u. (4_2) erfüllt sind.

---

*) Und [15,9] ist nicht = [16,7].

(5) ist erfüllt; denn 0 ist ein vorderer Modul,
da $0 + a = a \rightarrow 0 * a \doteq a$;
(5') ist erfüllt; denn 0 ist ein hinterer Modul,
da $a + 0 = a \rightarrow a * 0 \doteq a$;
(6_1), (6_1'), (6_2) u. (6_2') sind nicht erfüllt; denn die Gleichungen

$$x * 1 \doteq 0 \text{ oder } x + 1 = 0$$
$$\text{und } 1 * x \doteq 0 \text{ oder } 1 + x = 0$$

haben keine Lösung.

Zusammenstellung der Resultate (s. Beiblatt).

Nr. des Beispiels	1	2	3	4	5	6	7	8
Alle im Beispiel nicht erfüllt. Ges.	(G_s);	(G_t);	(1)	(2); alle (3_i).	(3); (3_1); (3_3); (3_4); (3_5); (3_6); (3_7); (3_8); (3_{12}); (3_{13}); (3_{14}); (3_{15});	(4_1); (4_2);	(5); (5');	(6_1); (6_1'); (6_2); (6_2');

KAPITEL II.

Vorbemerkungen:

1) Vor.: (G_s), (G_t), (1), (5) oder (5');
   Beh.: (G_r) ist erfüllt: $a \doteq a$;
   Bew.: Nach Vor. (5) oder (5') existiert im System zu jedem Element a ein Element a' der Art, daß $a' \doteq a$; also
   $a' \doteq a \rightarrow a \doteq a'$ u. $a' \doteq a$ . . . (G_s)
   $\rightarrow a \doteq a$ . . . (G_t)
   Da alle im Kap. II u. III behandelten Gesetzessysteme die Voraussetzungen dieses Satzes enthalten, haben sie auch das Erfülltsein des Gesetzes (G_r) zur Folge, was nicht mehr erwähnt wird.
2) Der Bequemlichkeit wegen sei darauf verzichtet, die Gesetze (G_r), (G_s) u. (G_t) überall dort anzuführen, wo sie angewendet werden.

---

§ 1.

	Die Gesetze lauten	Die log. Unabh. zeigen
	(G_s): $a \doteq b \rightarrow b \doteq a$;	Bsp. 1;
	(G_t): $a \doteq b$ u. $b \doteq c \rightarrow a \doteq c$;	Bsp. 2;
	(1): $a * b =_D c$;	Bsp. 3;
	(2): $a * b \doteq b * a$;	Bsp. 4;
S_0	(3): $(a * b) * c \doteq a * (b * c)$;	Bsp. 5;
	(4_1): $a \doteq a' \rightarrow a * b \doteq a' * b$;	Bsp. 6;
	(5): Es existiert m, sodaß $m * a \doteq a$ für jedes a;	Bsp. 7;
	(6_1): Wenn a beliebig und m vorderer Modul ist, so existiert a_m, sodaß $a_m * a \doteq m$ ist;	Bsp. 8;

Unter der gemeinsamen Voraussetzung S_0 gelten folgende Sätze:

Satz I: (4_2) ist erfüllt: $b \doteq b' \rightarrow a * b \doteq a * b'$;
Bew.: $b \doteq b' \rightarrow b * a \doteq b' * a \rightarrow a * b \doteq a * b'$; . . . (4_1); (2);

Satz II: $a * b \doteq a * b' \rightarrow b \doteq b'$;

Bew.: $a*b \doteq a*b' \rightarrow a_m*(a*b) \doteq a_m*(a*b') \ldots (6_1); (4_2);$
$\rightarrow (a_m * a) * b \doteq (a_m * a) * b' \ldots (3);$
$\rightarrow m * b \doteq m * b' \ldots (6_1); (4_1);$
$\rightarrow b \doteq b' \ldots (5);$

Satz III: $a * b \doteq a' * b \rightarrow a \doteq a';$
Bew.: $a * b \doteq a' * b \rightarrow b * a \doteq b * a' \rightarrow a \doteq a'; \ldots (2);$ Satz II;

Satz IV: $a * m \doteq a;$
Bew.: $a \doteq m * a \doteq a * m; \ldots (5); (2);$
d. h. Jedes m ist ein m'.

Ebenso beweist man: Jedes m' ist ein m.
Wir sprechen daher statt vom „vorderen" bezw. „hinteren" Modul vom „Modul" schlechthin und wählen m als gemeinsames Symbol.

Satz V: Sind m_1 und m_2 zwei Module, so ist $m_1 \doteq m_2$.
Bew.: $m_1 * a \doteq a$ u. $m_2 * a \doteq a \rightarrow m_1 \doteq m_2 \ldots (5);$ Satz III;

Satz VI: Ist $m_1 \doteq m_2$ und m_1 ein Modul, so ist auch m_2 ein Modul;
Bew.: $m_1 \doteq m_2$ und $m_1 * a \doteq a \rightarrow m_2 * a \doteq a \ldots (5); (4_1);$

Satz VII: Ist m ein Modul des Größensystems, so sind genau alle die Elemente m' Module des Systems, für die $m' \doteq m$ ist.
Beweis folgt aus Satz V u. VI.

Satz VIII: $a * a_m \doteq m;$
Bew.: $m \doteq a_m * a \doteq a * a_m; \ldots (6_1); (2);$
d. h. Jedes a_m ist ein $a'_m;$

Ebenso beweist man: Jedes a'_m ist ein $a_m;$
Da außerdem nach den Ergebnissen des Satzes IV zu den Gesetzen $(6_1')$ u. $(6_2')$ nichts zu beweisen ist, sprechen wir von der „Inverse" schlechthin und wählen a_m als gemeinsames Symbol.

Satz IX: Sind m_1 und m_2 zwei Module des Systems und ist $a_{m_1} * a \doteq m_1$ und $a_{m_2} * a \doteq m_2$, so ist $a_{m_1} \doteq a_{m_2}$
Beweis folgt aus Satz V unter Anwendung des Satzes III.

Dieser Satz berechtigt uns, $\overline{a}$ als gemeinsames Symbol für die Inversen des Elementes a einzuführen.

Satz X: Sind $\overline{a}_1$ und $\overline{a}_2$ zwei Inversen zu a, so ist $\overline{a}_1 \doteq \overline{a}_2$
Bew.: $\overline{a}_1 * a \doteq m$ und $\overline{a}_2 * a \doteq m \rightarrow \overline{a}_1 * a \doteq \overline{a}_2 * a \rightarrow \overline{a}_1 \doteq \overline{a}_2$
$\ldots (6_1);$ Satz III;

Satz XI: Ist $\overline{a}_1 \doteq \overline{a}'$ und $\overline{a}_1$ Inverse zu a, so ist auch $\overline{a}'$ Inverse zu a;
Bew.: $\overline{a}_1 \doteq \overline{a}'$ und $\overline{a}_1 * a \doteq m \rightarrow \overline{a}' * a \doteq m \ldots (6_1); (4_1);$

Aus Satz X und Satz XI folgt:

Satz XII: Ist $\bar{a}$ eine Inverse zu a, so sind genau alle die Elemente $\bar{a}'$ Inversen zu a, für die $\bar{a}' \doteqdot \bar{a}$ ist.

Satz XIII: Zu jedem Elementenpaar a, b existiert mindestens ein Element x des Größensystems der Art, daß $a \doteqdot x * b$. *)

Bew.: $x \equiv a * \bar{b}$ ist eine Lösung; denn

$x * b \doteqdot (a * \bar{b}) * b \doteqdot a * (\bar{b} * b) \doteqdot a * m \doteqdot a$

(6_1); (3); (6_1); (4_2); Satz IV;

Satz XIV: Für je zwei Lösungen x_1 und x_2 der Gleichung $a \doteqdot x * b$ gilt: $x_1 \doteqdot x_2$;

Bew.: $a \doteqdot x_1 * b$ u. $a \doteqdot x_2 * b \rightarrow x_1 * b \doteqdot x_2 * b \rightarrow x_1 \doteqdot x_2$

... Satz III;

Satz XV: Ist $x_1 \doteqdot x_2$ und x_1 Lösung von $a \doteqdot x * b$, so ist auch x_2 Lösung von $a \doteqdot x * b$;

Bew.: $x_1 \doteqdot x_2$ und $a \doteqdot x_1 * b \rightarrow a \doteqdot x_2 * b$ ... (4_1);

Satz XVI: Jede Lösung von $a \doteqdot x * b$ ist auch Lösung von $a \doteqdot b * y$ u. umgekehrt.

Bew.: $a \doteqdot x_0 * b \rightleftarrows a \doteqdot b * x_0$ ... (2);

Satz XVII: Die Gleichung $a \doteqdot b * y$ hat mindestens eine Lösung.

Bew.: s. Satz XVI;

Aus Satz XIV bis Satz XVI folgen

Satz XVIII: Ist x_0 eine Lösung von $a \doteqdot x * b$, so sind genau alle die Elemente x' des Größensystems Lösungen von $a \doteqdot x * b$ und $a \doteqdot b * y$, für die $x' \doteqdot x_0$ ist.

und

Satz XIX: Ist y_0 eine Lösung von $a \doteqdot b * y$, so sind genau alle die Elemente y' des Größensystems Lösungen von $a \doteqdot x * b$ und $a \doteqdot b * y$, für die $y' \doteqdot y_0$ ist.

Satz XX: **) (3_{15}) ist erfüllt: $a * (b * c) \doteqdot c * (b * a)$;

Bew.: $a * (b * c) \doteqdot (a * b) * c \doteqdot (b * a) * c \doteqdot c * (b * a)$

... (3); (2); (4_1); (2);

---

*) Wir nennen x „Lösung" der „Gleichung": $a \doteqdot x * b$.

**) Wird aus später ersichtlichen Gründen hier bewiesen.

§ 2.

	Die Gesetze lauten	Die log. Unabh. zeigen
S_1	(G_s): $a \doteq b \rightarrow b \doteq a$;	Bsp. 1;
	(G_t): $a \doteq b$ u. $b \doteq c \rightarrow a \doteq c$;	Bsp. 2;
	(1): $a * b =_D c$;	Bsp. 3;
	(3_1): $(a * b) * c \doteq (a * c) * b$;	Bsp. 5;
	(4_1): $a \doteq a' \rightarrow a * b \doteq a' * b$;	Bsp. 6;
	(5): Es existiert m, sodaß $m * a \doteq a$ für jedes a;	Bsp. 7;
	(6_1): Wenn a beliebig und m vorderer Modul ist, so existiert a_m, sodaß $a_m * a \doteq m$ ist;	Bsp. 8;

Unter der gemeinsamen Voraussetzung S_1 gelten folgende Sätze:

Satz I: (2) ist erfüllt: $a * b \doteq b * a$;

Bew.: $a * b \doteq (m * a) * b$ ... (5); (4_1);

$\doteq (m * b) * a \doteq b * a$ ... (3_1); (5); (4_1);

Satz II: (3) ist erfüllt: $(a * b) * c \doteq a * (b * c)$

Bew.: $(a * b) * c \doteq (b * a) * c$ ... (2); (4_1);

$\doteq (b * c) * a \doteq a * (b * c)$ ... (3_1); (2);

Damit ist gezeigt:

$$S_1 \rightarrow S_0$$

§ 3.

	Die Gesetze lauten	Die log. Unabh. zeigen
S_3	(G_s): $a \doteq b \rightarrow b \doteq a$;	Bsp. 1;
	(G_t): $a \doteq b$ u. $b \doteq c \rightarrow a \doteq c$;	Bsp. 2;
	(1): $a * b =_D c$;	Bsp. 3;
	(3_3): $(a * b) * c \doteq (b * c) * a$;	Bsp. 5;
	(4_1): $a \doteq a' \rightarrow a * b \doteq a' * b$;	Bsp. 6;
	(5): Es existiert m, sodaß $m * a \doteq a$ für jedes a;	Bsp. 7;
	(6_1): Wenn a beliebig und m vorderer Modul ist, so existiert a_m, sodaß $a_m * a \doteq m$ ist;	Bsp. 8;

Unter der gemeinsamen Voraussetzung S_3 gelten folgende Sätze:

Satz I: Es existiert ein hinterer Modul, und zwar ist m ein solcher; d. i. (5').

Bew.: $a * m \doteq (m * a) * m$ ... (5); (4_1);

$\doteq (a * m) * m \doteq (m * m) * a$ ... (3_3);

$\doteq m * a \quad \doteq a$ ... (5); (4_1); (5);

Satz II: (2) ist erfüllt: $a * b \doteqdot b * a$

Bew.: $a * b \doteqdot (a * b) * m$ ... Satz I;

$\doteqdot (b * m) * a \doteqdot b * a$ ... (3_3); Satz I; (4_1);

Satz III: (3_1) ist erfüllt: $(a * b) * c \doteqdot (a * c) * b$;

Bew.: $(a * b) * c \doteqdot (b * a) * c \doteqdot (a * c) * b$;

... (2); (4_1); (3_3);

Damit ist gezeigt:

$\underline{S_3 \rightarrow S_1}$

§ 4.

Unter Voraussetzung der Gleichheitsgesetze gilt:

$(3_4) \rightarrow (3_3)$ oder: $(a * b) * c \doteqdot (c * a) * b \rightarrow (a * b) * c \doteqdot (b * c) * a$;

denn: $(a * b) * c \doteqdot (c * a) * b$ und

$(c * a) * b \doteqdot (b * c) * a$ .. (3_4);

$\rightarrow (a * b) * c \doteqdot (b * c) * a$

Ersetzt man in S_3 Gesetz (3_3) durch (3_4) und nennt das neue System S_4, so ist also:

$\underline{S_4 \rightarrow S_3}$

§ 5.

	Die Gesetze lauten	Die log. Unabh. zeigen
S_5	(G_s): $a \doteqdot b \rightarrow b \doteqdot a$;	Bsp. 1;
	(G_t): $a \doteqdot b$ u. $b \doteqdot c \rightarrow a \doteqdot c$;	Bsp. 2;
	(1): $a * b =_D c$;	Bsp. 3;
	(3_5): $(a * b) * c \doteqdot (c * b) * a$;	Bsp. 5;
	(4_1): $a \doteqdot a' \rightarrow a * b \doteqdot a' * b$;	Bsp. 6;
	(5'): Es existiert m', sodaß $a * m' \doteqdot a$ für jedes a;	Bsp. 7;
	$(6_1')$: Wenn a beliebig und m' hinterer Modul ist, so existiert $a_{m'}$, sodaß $a_{m'} * a \doteqdot m'$ ist;	Bsp. 8;

Unter der gemeinsamen Voraussetzung S_5 gelten folgende Sätze:

Satz I: Es existiert ein vorderer Modul, und zwar ist m' ein solcher; d. i. (5).

Bew.: $m' * a \doteqdot (m' * m') * a$ ... (5'); (4_1);

$\doteqdot (a * m') * m' \doteqdot a * m' \doteqdot a$ ... (3_5); (5');

Satz II: (2) ist erfüllt: $a * b \doteqdot b * a$;

Bew.: $a * b \doteqdot (a * b) * m'$ ... (5');

$\doteqdot (m' * b) * a \doteqdot b * a$ ... (3_5); Satz I; (4_1);

Satz III: (3_4) ist erfüllt: $(a * b) * c \doteq (c * a) * b$;

Bew.: $(a * b) * c \doteq (b * a) * c$ ... (2); (4_1);

$\doteq (c * a) * b$ ... (3_5);

(2) hat zur Folge, da auch (5) erfüllt ist,

$m * a \doteq a \rightarrow a * m \doteq a$ für jedes a,

d. h. jeder vordere Modul ist auch hinterer Modul. Daher gibt $(6_1')$:

Zu a und m existiert a_m sodaß

$a_m * a \doteq m$ d. i. (6_1).

Damit ist gezeigt:

$\underline{S_5 \rightarrow S_4}$

§ 6. *)

	Die Gesetze lauten	Die log. Unabh. zeigen
S_6	(G_s): $a \doteq b \rightarrow b \doteq a$;	Bsp. 1;
	(G_t): $a \doteq b$ u. $b \doteq c \rightarrow a \doteq c$;	Bsp. 2;
	(1): $a * b =_D c$;	Bsp. 3;
	(3_6): $(a * b) * c \doteq a * (c * b)$;	Bsp. 5;
	(4_1): $a \doteq a' \rightarrow a * b \doteq a' * b$;	Bsp. 6;
	(5): Es existiert m, sodaß $m * a \doteq a$ für jedes a;	Bsp. 7;
	(6_1): Wenn a beliebig und m vorderer Modul ist, so existiert a_m, sodaß $a_n * a \doteq m$ ist;	Bsp. 8;

Unter der gemeinsamen Voraussetzung S_6 gelten folgende Sätze:

Satz I: (2) ist erfüllt: $a * b \doteq b * a$;

Bew.: $a * b \doteq m * (a * b)$ ... (5);

$\doteq (m * b) * a \doteq b * a$ ... (3_6); (5); (4_1);

Satz II: (3_5) ist erfüllt: $(a * b) * c \doteq (c * b) * a$;

Bew.: $(a * b) * c \doteq c * (a * b)$ ... (2);

$\doteq (c * b) * a$ ... (3_6);

(2) und (5) haben zur Folge

$m * a \doteq a \rightarrow a * m \doteq a$ für jedes a; d. i. (5');

Aus (2) folgt

$a * m' \doteq a \rightarrow m' * a \doteq a$ für jedes a,

d. h. jeder hintere Modul ist auch vorderer Modul. Daher gibt (6_1);

Zu a und m' existiert $a_{m'}$, sodaß $a_{m'} * a \doteq m'$ ... d. i. $(6_1')$.

Damit ist gezeigt:

$\underline{S_6 \rightarrow S_5}$

*) Siehe hierzu: Hurwitz: "Note on the definition of an Abelian group by independent postulates." Annals of Math. (2) 8, 94—96.

§ 7.

	Die Gesetze lauten	Die log. Unabh. zeigen
	(G_s): $a \doteq b \rightarrow b \doteq a$;	Bsp. 1;
	(G_t): $a \doteq b$ u. $b \doteq c \rightarrow a \doteq c$;	Bsp. 2;
	(1): $a * b =_D c$;	Bsp. 3;
	(3_7): $(a * b) * c \doteq b * (a * c)$;	Bsp. 5;
S_7	(4_1): $a \doteq a' \rightarrow a * b \doteq a' * b$;	Bsp. 6;
	(5'): Es existiert m', sodaß $a * m' \doteq a$ für jedes a;	Bsp. 7;
	$(6_1')$: Wenn a beliebig und m' hinterer Modul ist, so existiert a_m', sodaß $a_m' * a \doteq m'$ ist;	Bsp. 8;

Unter der gemeinsamen Voraussetzung S_7 gelten folgende Sätze:

Satz I: (3) ist erfüllt: $(a * b) * c \doteq a * (b * c)$;

Bew.: $(a * b) * c \doteq ((a * b) * m') * c$ ... (5'); (4_1);
$\doteq (b * (a * m')) * c$ ... (3_7); (4_1);
$\doteq (a * m') * (b * c)$ ... (3_7);
$\doteq a * (b * c)$ ... (5'); (4_1);

Satz II: (2) ist erfüllt: $a * b \doteq b * a$;

Bew.: $a * b \doteq (a * b) * m'$ ... (5');
$\doteq b * (a * m') \doteq (b * a) * m' \doteq b * a$ ... (3_7); (3); (5');

Satz III: (3_6) ist erfüllt: $(a * b) * c \doteq a * (c * b)$;

Bew.: $(a * b) * c \doteq c * (a * b)$ ... (2);
$\doteq (a * c) * b \doteq a * (c * b)$ ... (3_7); (3);

(2) und (5') haben zur Folge
$a * m' \doteq a \rightarrow m' * a \doteq a$ für jedes a d. i. (5).

Aus (2) folgt
$m * a \doteq a \rightarrow a * m \doteq a$ für jedes a,

d. h. jeder vordere Modul ist auch hinterer Modul. Daher gibt $(6_1')$;

Zu a und m existiert a_m, sodaß
$a_m * a \doteq m$ d. i. (6_1).

Damit ist gezeigt:

$S_7 \rightarrow S_6$

§ 8.

	Die Gesetze lauten	Die log. Unabh. zeigen
S_8	(G_s): $a \doteqdot b \rightarrow b \doteqdot a$;	Bsp. 1;
	(G_t): $a \doteqdot b$ u. $b \doteqdot c \rightarrow a \doteqdot c$;	Bsp. 2;
	(1): $a * b =_D c$;	Bsp. 3;
	(3_8): $(a * b) * c \doteqdot b * (c * a)$;	Bsp. 5;
	(4_1): $a \doteqdot a' \rightarrow a * b \doteqdot a' * b$;	Bsp. 6;
	(5): Es existiert m, sodaß $m * a \doteqdot a$ für jedes a;	Bsp. 7;
	(6_1): Wenn a beliebig und m vorderer Modul ist, so existiert a_m, sodaß $a_m * a \doteqdot m$ ist;	Bsp. 8;

Unter der gemeinsamen Voraussetzung S_8 gelten folgende Sätze:

Satz I: Es existiert ein hinterer Modul, und zwar ist m ein solcher; d. i. (5').

Bew.: $a * m \doteqdot m * (a * m)$ ... (5);
$\doteqdot (m * m) * a \doteqdot m * a \doteqdot a$; (3_8); (5); (4_1); (5);

Satz II: (2) ist erfüllt: $a * b \doteqdot b * a$;

Bew.: $a * b \doteqdot m * (a * b)$ ... (5);
$\doteqdot (b * m) * a \doteqdot b * a$ ... (3_8); Satz I; (4_1);

Satz III: (3_7) ist erfüllt: $(a * b) * c \doteqdot b * (a * c)$;

Bew.: $(a * b) * c \doteqdot b * (c * a) \doteqdot (c * a) * b$ ... (3_8); (2);
$\doteqdot (a * c) * b \doteqdot b * (a * c)$ ... (2); (4_1); (2);

(2) hat zur Folge, da auch (5') erfüllt ist,
$a * m' \doteqdot a \rightarrow m' * a \doteqdot a$ für jedes a,
d. h. jeder hintere Modul ist auch vorderer Modul. Daher gibt (6_1): Zu a und m' existiert $a_{m'}$, sodaß
$a_{m'} * a \doteqdot m'$ d. i. $(6_1')$.

Damit ist gezeigt:

$S_8 \rightarrow S_7$

§ 9.

	Die Gesetze lauten	Die log. Unabh. zeigen
S_{12}	(G_s): $a \doteqdot b \rightarrow b \doteqdot a$;	Bsp. 1;
	(G_t): $a \doteqdot b$ u. $b \doteqdot c \rightarrow a \doteqdot c$;	Bsp. 2;
	(1): $a * b =_D c$;	Bsp. 3;
	(3_{12}): $a * (b * c) \doteqdot b * (a * c)$;	Bsp. 5;
	(4_2): $b \doteqdot b' \rightarrow a * b \doteqdot a * b'$;	Bsp. 6;
	(5'): Es existiert m', sodaß $a * m' \doteqdot a$ für jedes a;	Bsp. 7;
	$(6_1')$: Wenn a beliebig und m' hinterer Modul ist, so existiert $a_{m'}$, sodaß $a_m * a \doteqdot m'$ ist;	Bsp. 8;

Unter der gemeinsamen Voraussetzung S_{12} gelten folgende Sätze:

Satz I: (2) ist erfüllt: $a * b \doteq b * a$;

Bew.: $a * b \doteq a * (b * m')$ ... (5'); (4_2);

$\doteq b * (a * m') \doteq b * a$ ... (3_{12}); (5'); (4_2);

Satz II: (3_8) ist erfüllt: $(a * b) * c \doteq b * (c * a)$;

Bew.: $(a * b) * c \doteq c * (a * b) \doteq c * (b * a)$ ... (2); (4_2);

$\doteq b * (c * a)$ ... (3_{12});

Satz III: (4_1) ist erfüllt: $a \doteq a' \rightarrow a * b \doteq a' * b$; Beweis aus (2) u. ($4_2$).

(2) und (5') haben zur Folge

$a * m' \doteq a \rightarrow m' * a \doteq a$ für jedes a d. i. (5).

Aus (2) folgt

$m * a \doteq a \rightarrow a * m \doteq a$ für jedes a,

d. h. jeder vordere Modul ist auch hinterer Modul. Daher gibt (6_1'): Zu a und m existiert a_m, sodaß

$a_m * a \doteq m$ d. i. (6_1).

Damit ist gezeigt:

$S_{12} \rightarrow S_8$

§ 10.

Die Gesetze lauten		Die log. Unabh. zeigen
	(G_s): $a \doteq b \rightarrow b \doteq a$;	Bsp. 1;
	(G_t): $a \doteq b$ u. $b \doteq c \rightarrow a \doteq c$;	Bsp. 2;
	(1): $a * b =_D c$;	Bsp. 3;
	(3_{13}): $a * (b * c) \doteq b * (c * a)$;	Bsp. 5;
S_{13}	(4_1): $a \doteq a' \rightarrow a * b \doteq a' * b$;	Bsp. 6;
	(5): Es existiert m, sodaß $m * a \doteq a$ für jedes a:	Bsp. 7;
	(6_1): Wenn a beliebig und m vorderer Modul ist, so existiert a_m, sodaß $a_m * a \doteq m$ ist;	Bsp. 8;

Unter der gemeinsamen Voraussetzung S_{13} gelten folgende Sätze:

Satz I: (4_2) ist erfüllt: $b \doteq b' \rightarrow a * b \doteq a * b'$;

Bew.: $b \doteq b' \rightarrow b * (m * a) \doteq b' * (m * a)$ ... (5); (4_1);

$\rightarrow m * (a * b) \doteq m * (a * b')$ ... (3_{13});

$\rightarrow a * b \doteq a * b'$ ... (5);

Satz II: (2) ist erfüllt $a * b \doteq b * a$;

Bew.: $a * b \doteq m * (a * b)$ ... (5);

$\doteq a * (b * m) \doteq b * (m * a) \doteq b * a$

... (3_{12}); (5); (4_2);

Satz III: (3_{12}) ist erfüllt: $a * (b * c) \doteqdot b * (a * c)$;

Bew.: $a * (b * c) \doteqdot b * (c * a) \doteqdot b * (a * c)$
$\ldots (3_{13}); (2); (4_2);$

(2) und (5) haben zur Folge

$m * a \doteqdot a \rightarrow a * m \doteqdot a$ d. i. (5').

Aus (2) folgt: $a * m' \doteqdot a \rightarrow m' * a \doteqdot a$ für jedes a, d. h. jeder hintere Modul ist auch vorderer Modul. Daher gibt (6_1): Zu a und m' existiert a_m', sodaß

$a_m' * a \doteqdot m'$ d. i. $(6_1')$.

Damit ist gezeigt:

$\underline{S_{13} \rightarrow S_{12}}$

§ 11.

Unter Voraussetzung der Gleichheitsgesetze gilt:

$(3_{14}) \rightarrow (3_{13})$ oder $a * (b * c) \doteqdot c * (a * b) \rightarrow a * (b * c) \doteqdot b * (c * a)$;

denn: $a * (b * c) \doteqdot c * (a * b)$ und $c * (a * b) \doteqdot b * (c * a)$
$\ldots (3_{14});$
$\rightarrow a * (b * c) \doteqdot b * (c * a)$

Ersetzt man in S_{13} Gesetz (3_{13}) durch (3_{14}) und nennt das neue System S_{14}, so gilt also:

$\underline{S_{14} \rightarrow S_{13}}$

§ 12.

	Die Gesetze lauten	Die log. Unabh. zeigen
S_{15}	(G_S): $a \doteqdot b \rightarrow b \doteqdot a$;	Bsp. 1;
	(G_t): $a \doteqdot b$ u. $b \doteqdot c \rightarrow a \doteqdot c$;	Bsp. 2;
	(1): $a * b =_D c$;	Bsp. 3;
	(3_{15}): $a * (b * c) \doteqdot c * (b * a)$;	Bsp. 5;
	(4_1): $a \doteqdot a' \rightarrow a * b \doteqdot a' * b$;	Bsp. 6;
	(5): Es existiert m, sodaß $m * a \doteqdot a$ für jedes a;	Bsp. 7;
	(6_1): Wenn a beliebig und m vorderer Modul ist, so existiert a_m, sodaß $a_m * a \doteqdot m$ ist;	Bsp. 8;

Unter der gemeinsamen Voraussetzung S_{15} gelten folgende Sätze:

Satz I: Es existiert ein hinterer Modul m'_1; d. i. (5'); überdies ist $m'_1 \doteqdot m$.

Bew.: $a \doteqdot m * (m * a) \doteqdot a * (m * m)$ ... (5); (3_{15});
$\doteqdot a * m'_1$, wo $m * m =_D m'_1$ u. $m * m \doteqdot m \cdot m'_1 \doteqdot m$ ... (5);

Satz II: (2) ist erfüllt: $a * b \doteqdot b * a$;

Bew.: $a * b \doteqdot m * (a * b) \doteqdot b * (a * m)$ ... (5); (3_{15});
$\doteqdot (b * m'_1) * (a * m)$ ... Satz I; (4_1);
$\doteqdot m * (a * (b * m'_1))$ ... (3_{15});
$\doteqdot a * (b * m'_1) \doteqdot m'_1 * (b * a)$ ... (5); (3_{15});
$\doteqdot m * (b * a) \doteqdot b * a$ ... Satz I; (4_1); (5);

Satz III: (3_{14}) ist erfüllt: $a * (b * c) \doteqdot c * (a * b)$;

Bew.: $a * (b * c) \doteqdot c * (b * a) \doteqdot (b * a) * c$ ... (3_{15}); (2);
$\doteqdot (a * b) * c \doteqdot c * (a * b)$ ... (2); (4_1); (2);

Damit ist gezeigt:

$$\underline{S_{15} \rightarrow S_{14}}$$

§ 13.

Satz XX. § 1 dieses Kapitels berechtigt zum Schluß:

$$\underline{S_0 \rightarrow S_{15}}$$

Mithin ist das Resultat dieses Kapitels:

$S_{15} \rightarrow S_{14} \rightarrow S_{13} \rightarrow S_{12} \rightarrow S_8 \rightarrow S_7 \rightarrow S_6 \rightarrow S_5 \rightarrow S_4 \rightarrow S_3 \rightarrow S_1 \rightarrow S_0 \rightarrow S_{15}$;

d. h. Alle Gesetzessysteme dieses Kapitels sind einander äquivalent.

KAPITEL III.

Beispiel 5 zeigt, daß das Erfülltsein der Gesetze (G_5); (G_6); (1); (3_2) bzw. (3_9); (3_{10}); (3_{11}); (4_1) bzw. (4_2); (5) bzw. (5') und (6_1) bzw. $(6_1')$, (6_2), $(6_2')$ nicht das Erfülltsein des Gesetzes (3) bedingt. Die entsprechenden Systeme S_2, S_9, S_{10} und S_{11} ohne das assoziative Gesetz sind also dem System S_0 nicht äquivalent. Ihre Untersuchung ist — wenn man das assoziative Gesetz hinzunimmt — uninteressant und unterbleibt daher.

Der Versuch, zu den Systemen S_2, S_9, S_{10} u. S_{11} statt des Gesetzes (3) das Gesetz (2) zuzufügen, erweist sich als wertlos, da in den so abgeänderten Systemen die Gesetze (3_2) bzw. (3_9), (3_{10}) u. (3_{11}) sich als abhängig von den übrigen Gesetzen erweisen; denn es gilt:

(2) und $(4_1) \rightarrow (a * b) * c \doteqdot (b * a) * c$; d. i. (3_2);

(2) $\rightarrow (a * b) * c \doteqdot c * (a * b)$; d. i. (3_9);

(2) und $(4_1) \rightarrow (a * b) * c \doteqdot (b * a) * c \doteqdot c * (b * a)$; d. i. (3_{10});

$[(\text{(2) u. } (4_1)) \rightarrow (4_2)] \rightarrow a * (b * c) \doteqdot a * (c * b)$; d. i. (3_{11});

Literaturverzeichnis.

L. E. Dickson: „Definitions of a field by independent postulates". American M. S. Trans. 4, 13—20.

E. V. Huntington: „Two definitions of an Abelian group by sets of independent postulates." American M. S. Trans. 4, 27—30.

— „Definitions of a field by sets of independent postulates." American M. S. Trans. 4, 31—37.

W. A. Hurwitz: „Note on the definition of an Abelian group by independent postulates." Annals of Math. (2) 8, 94—96.

E. H. Moore: „On a definition of abstract groups." American M. S. Trans. 6, 179—180.

K. Yoneyama: „Sets of independent postulates concerning equality and inequality." Tôhoku Math. J. 14, 171—283.

— „Axiomatic investigation on number systems." I. Tôhoku Math. J. 22, 99—137.

— „Axiomatic investigation on number systems." III. Tôhoku Math. J. 24, 1—31.

Beiblatt.

Aufzählung der Gesetze.

(G_r): $a \doteqdot a$;

(G_s): $a \doteqdot b \rightarrow b \doteqdot a$;

(G_t): $a \doteqdot b$ u. $b. \doteqdot c \rightarrow a \doteqdot c$;

(1): $a * b =_D c$;

(2): $a * b \doteqdot b * a$;

(3): $(a * b) * c \doteqdot a * (b * c)$;

(3_1): $(a * b) * c \doteqdot (a * c) * b$;

(3_2): $(a * b) * c \doteqdot (b * a) * c$;

(3_3): $(a * b) * c \doteqdot (b * c) * a$;

(3_4): $(a * b) * c \doteqdot (c * a) * b$;

(3_5): $(a * b) * c \doteqdot (c * b) * a$;

(3_6): $(a * b) * c \doteqdot a * (c * b)$;

(3_7): $(a * b) * c \doteqdot b * (a * c)$;

(3_8): $(a * b) * c \doteqdot b * (c * a)$;

(3_9): $(a * b) * c \doteqdot c * (a * b)$;

(3_{10}): $(a * b) * c \doteqdot c * (b * a)$;

(3_{11}): $a * (b * c) \doteqdot a * (c * b)$;

(3_{12}): $a * (b * c) \doteqdot b * (a * c)$;

(3_{13}): $a * (b * c) \doteqdot b * (c * a)$;

(3_{14}): $a * (b * c) \doteqdot c * (a * b)$;

(3_{15}): $a * (b * c) \doteqdot c * (b * a)$;

(4_1): $a \doteqdot a' \rightarrow a * b \doteqdot a' * b$;

(4_2): $b \doteqdot b' \rightarrow a * b \doteqdot a * b'$;

(5): $m * a \doteqdot a$;

(5'): $a * m' \doteqdot a$;

(6_1): $a_m * a \doteqdot m$;

$(6_1')$: $a_m' * a \doteqdot m'$;

(6_2): $a * a'_m \doteqdot m$;

$(6_2')$: $a * a'_m' \doteqdot m'$;

Zusammenstellung der Resultate von § 2, Kap. I.

Nr. des Beispiels	1	2	3	4	5	6	7	8
Nicht erfüllte Gesetze.	(G_s)	(G_t)	(1)	(2) und alle (3_i)	(3); (3_1); (3_3); (3_4); (3_5); (3_6); (3_7); (3_8); (3_{12}); (3_{13}); (3_{14}); (3_{15});	(4_1); (4_2);	(5); (5');	(6_1); $(6_1')$; (6_2); $(6_2')$;

Zusammenstellung der Bezeichnungen.

$\rightarrow$: A $\rightarrow$ B bedeutet: Aus A folgt B.

$\overrightarrow{\leftarrow}$: bedeutet: . . . dann und nur dann, wenn . . .

$\equiv$: A $\equiv$ B bedeutet: A ist identisch mit B.

$\doteqdot$: ist das Gleichheitszeichen im Sinne des Kap. I, § 1, (0).

$=_D$: ist das Gleichheitszeichen der Definitionsgleichung (Kap. I, § 1, (1)).

$*$: ist das Zeichen der Verknüpfung zweier Elemente.